

La décomposition modale multi-dimensionnelle comme outil d'analyse de la variabilité de la ressource solaire en milieu urbain

Journées Nationales de l'Énergie Solaire 2024 – Anglet, France // 26 Juin 2024

Guillaume Le Gall ^(1*), Martin Thebault ⁽¹⁾, Valeria Simoncini ⁽²⁾ & Julien Ramousse ⁽¹⁾

⁽¹⁾ LaboratOire proCédés énergle bâtimEnt (LOCIE), UMR CNRS 5271, Université Savoie Mont Blanc, 60 Avenue du Lac Léman, 73376 Le Bourget-du-Lac, France

⁽²⁾ Dipartimento di Matematica, Alma Mater Studiorum Università di Bologna (UNIBO), Piazza di Porta San Donato, 5, 40127 Bologna, Italie

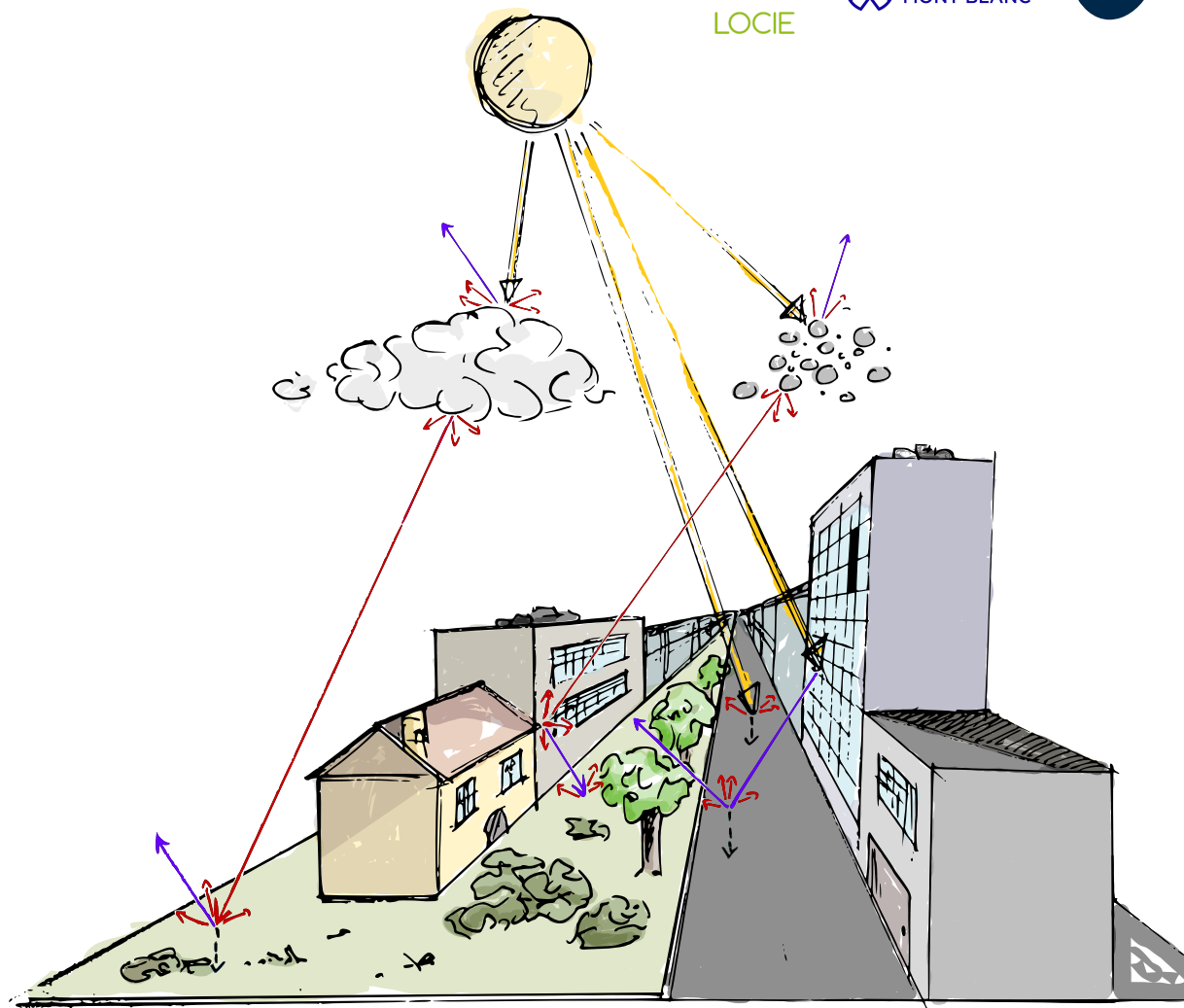
* Auteur correspondant : guillaume.le-gall@univ-smb.fr

Le milieu urbain



Contexte et objectifs

Le milieu urbain



Contexte et objectifs

Le milieu urbain

La complexité intrinsèque du tissu urbain amène à une

variation spatio-temporelle importante

de la distribution d'irradiance à l'échelle de la ville

Variations naturelles du rayonnement

Position géographique
Cycles journaliers et saisonniers
Conditions climatiques

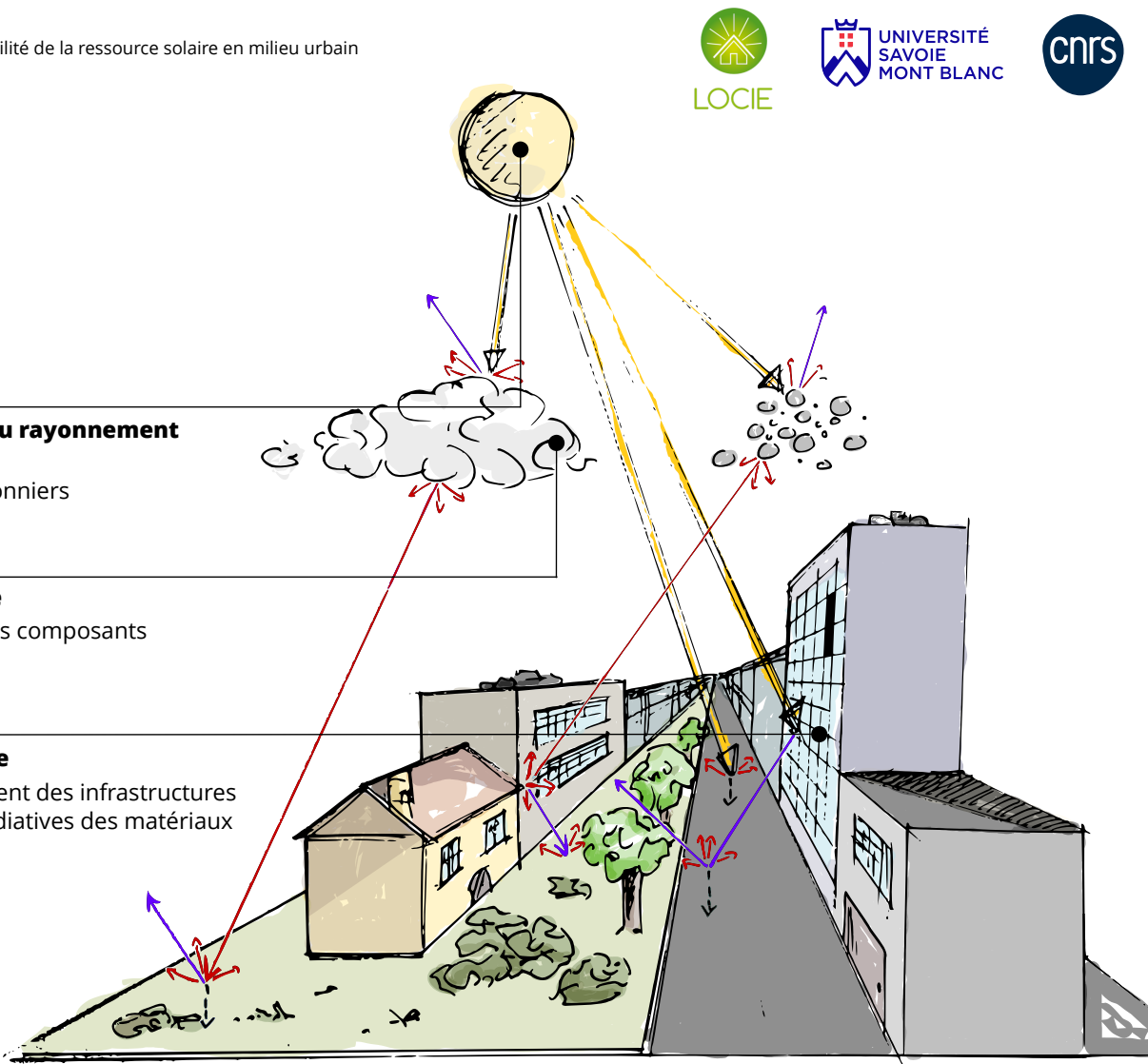
Couche atmosphérique

Nuages, aérosols et autres composants

Complexité structurelle

Morphologie et agencement des infrastructures
Propriétés optiques et radiatives des matériaux

Transferts radiatifs dans un milieu urbain type



Contexte et objectifs

Le milieu urbain

La complexité intrinsèque du tissu urbain amène à une

variation spatio-temporelle importante

de la distribution d'irradiance à l'échelle de la ville

DÉFI
MAJEUR

Caractérisation fine

Gestion de l'intermittence
Pilotage des réseaux énergétiques

Variations naturelles du rayonnement

Position géographique
Cycles journaliers et saisonniers
Conditions climatiques

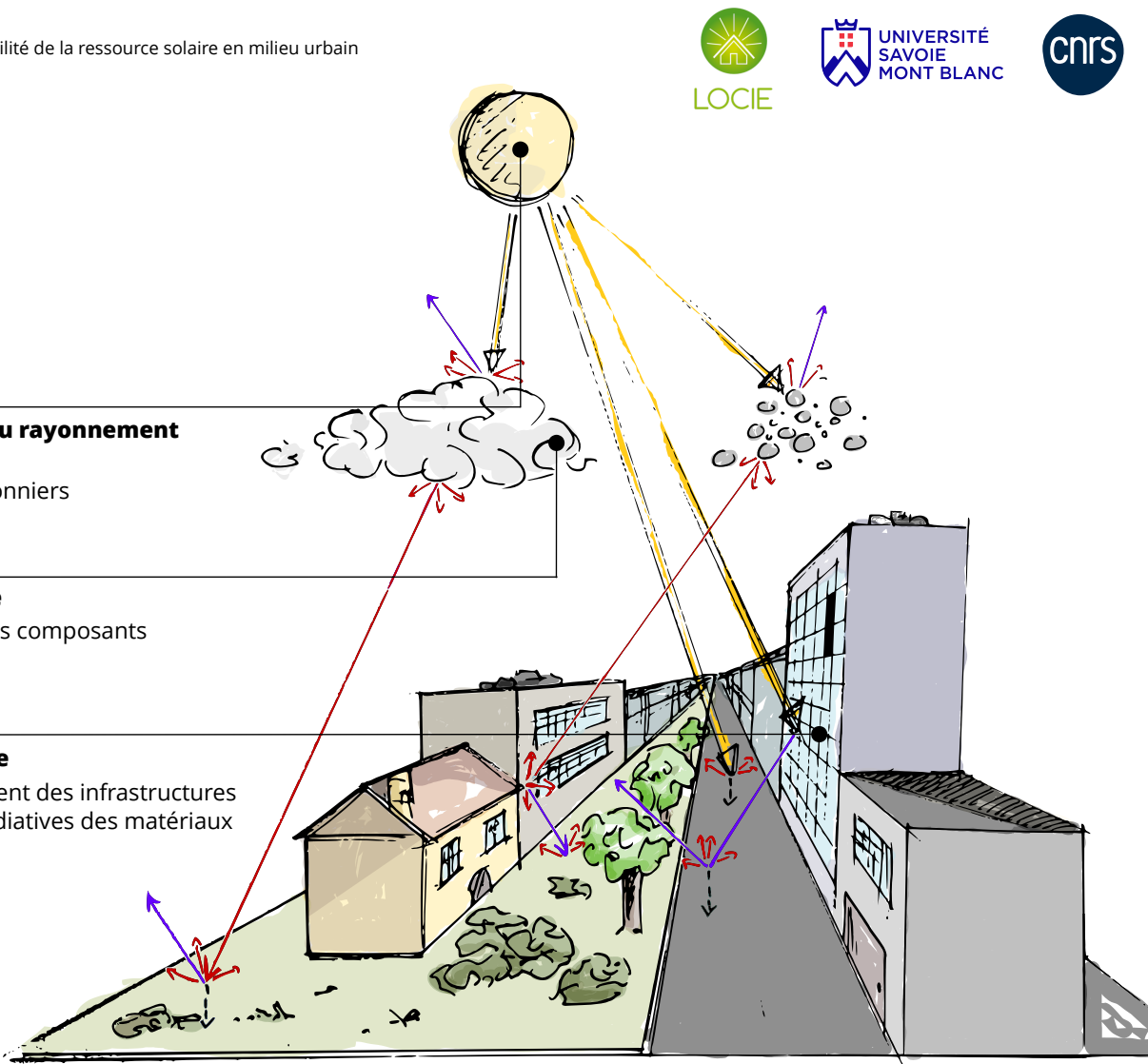
Couche atmosphérique

Nuages, aérosols et autres composants

Complexité structurelle

Morphologie et agencement des infrastructures
Propriétés optiques et radiatives des matériaux

Transferts radiatifs dans un milieu urbain type



Contexte et objectifs

Analyse modale multi-dimensionnelle

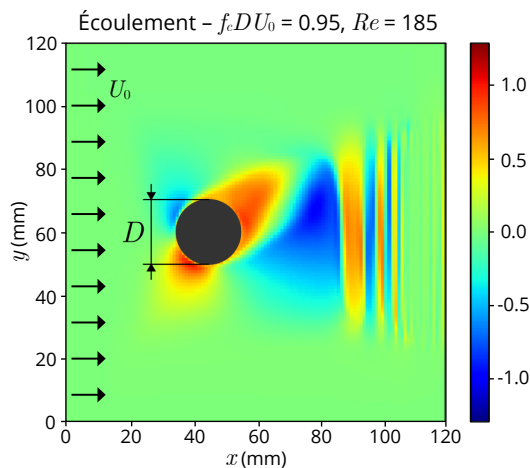
En présence de **phénomènes multivariés**, résultats d'interactions complexes entre une multitude de degrés de libertés, **définis sur une large gamme de fréquences spatiales et temporelles**, une réduction d'ordre peut être appliquée pour en **appréhender la dynamique globale**.

UN OBJECTIF DOUBLE

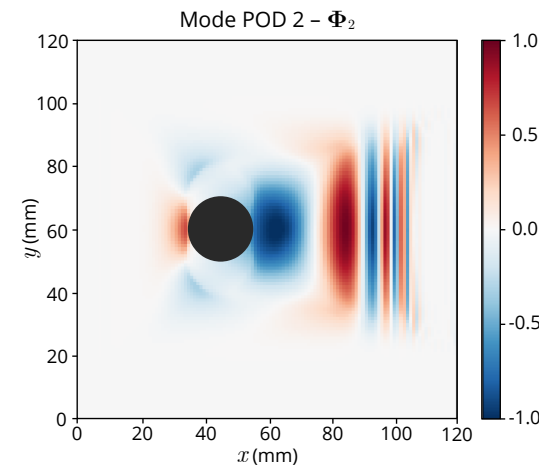
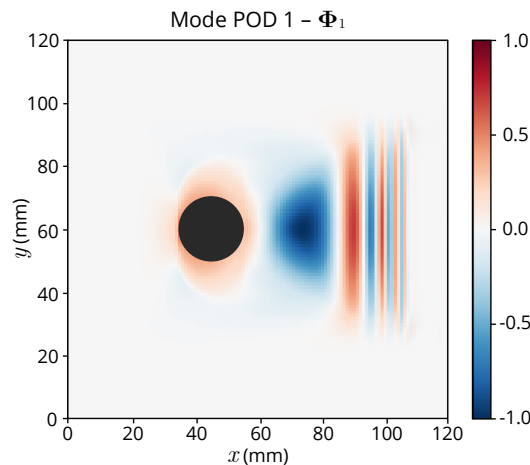
- **Définition d'un modèle d'ordre réduit** permettant une représentation fidèle du phénomène initial à faible coût numérique
- **Identification des principales directions de variations** pour le champ physique considéré, *i.e.* capturant le maximum d'information sur son comportement global

UNE MULTITUDE D'ALGORITHMES

- Analyse de Fourier, Analyse en Composantes Principales (PCA), Proper Generalised Decomposition (PGD), Dynamic Mode Decomposition (DMD)
- Une pléthore de domaines d'application : climatologie, chimie, médecine, électronique, mécanique des fluides, etc.



Analyse en
Composantes Principales
(PCA)



Contexte et objectifs

Analyse modale multi-dimensionnelle

En présence de **phénomènes multivariés**, résultats d'interactions complexes entre une multitude de degrés de libertés, **définis sur une large gamme de fréquences spatiales et temporelles**, une réduction d'ordre peut être appliquée pour en **appréhender la dynamique globale**.

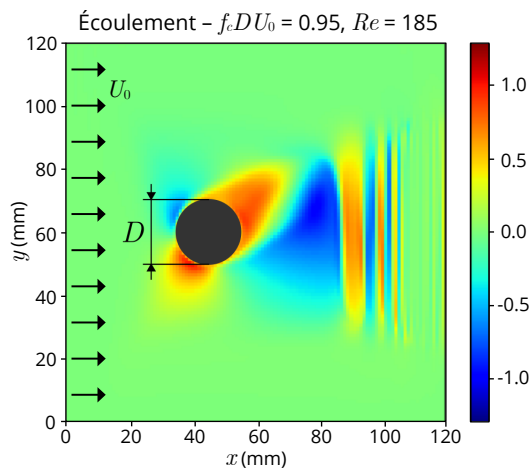
UN OBJECTIF DOUBLE

- **Définition d'un modèle d'ordre réduit** permettant une représentation fidèle du phénomène initial à faible coût numérique
- **Identification des principales directions de variations** pour le champ physique considéré, *i.e.* capturant le maximum d'information sur son comportement global

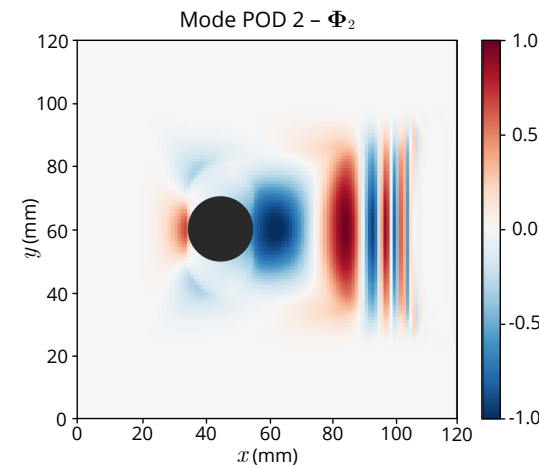
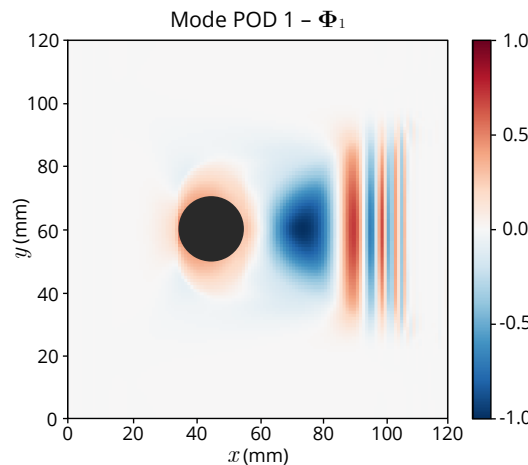
UNE MULTITUDE D'ALGORITHMES

(Le Gall et al. 2023)

- Analyse de Fourier, **Analyse en Composantes Principales (PCA)**, Proper Generalised Decomposition (PGD), Dynamic Mode Decomposition (DMD)
- Une pléthore de domaines d'application : climatologie, chimie, médecine, électronique, mécanique des fluides, etc.



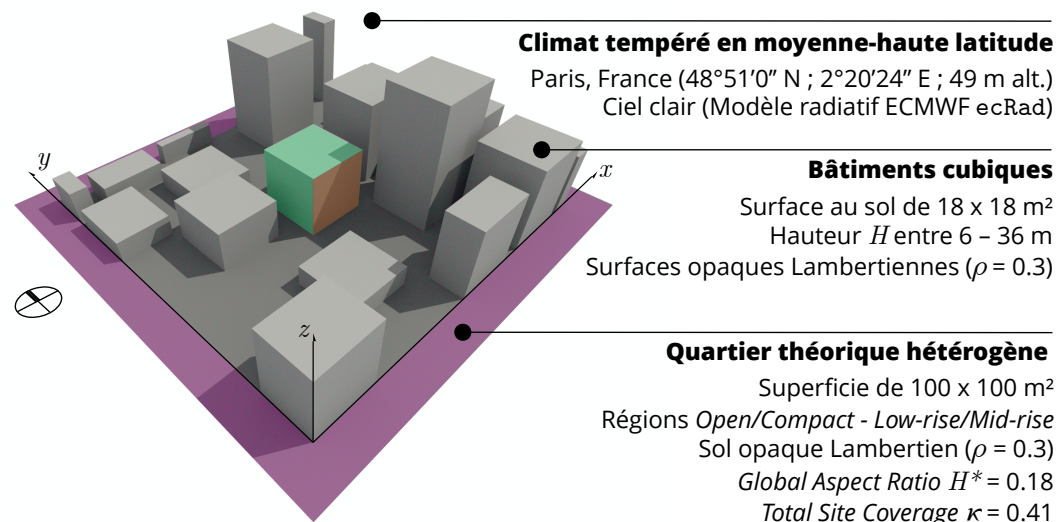
Analyse en
Composantes Principales
(PCA)



I. Décomposition modale du champ d'irradiance

I.1. Modélisation du rayonnement en milieu urbain hétérogène

L'outil de simulation `htrdr-urban` (Lancé de rayon par Monte Carlo + Algorithmes à collisions nulles) a été utilisé pour **modélisé le rayonnement solaire incident** sur les cinq faces du bâtiment central.

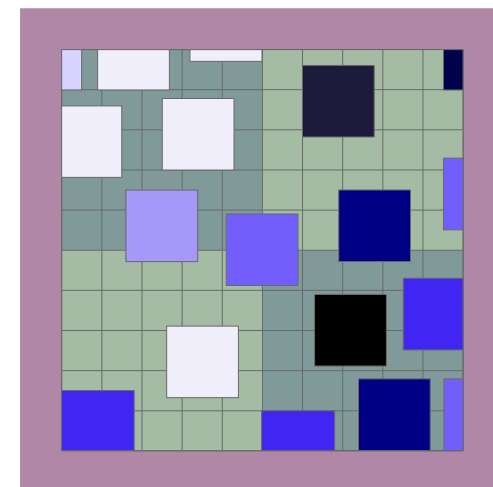


$$\Delta x = 1 \text{ m}$$

Grilles d'évaluation 2-D avec une résolution spatial de 1 m

$$\Delta t = 15 \text{ min}$$

Simulation annuelle avec un pas de temps de 15 minutes



Hauteur H

6 m	18 m	27 m
9 m	21 m	30 m
12 m	24 m	36 m

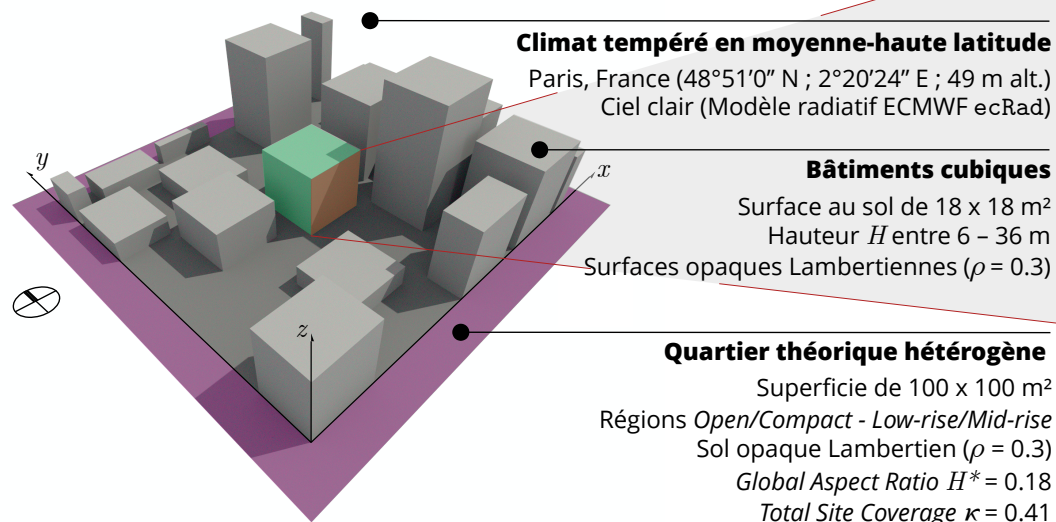
Densité

Open ($\kappa < 40$)
Compact ($\kappa > 40$)

I. Décomposition modale du champ d'irradiance

I.1. Modélisation du rayonnement en milieu urbain hétérogène

L'outil de simulation `htrdr-urban` (Lancé de rayon par Monte Carlo + Algorithmes à collisions nulles) a été utilisé pour **modéliser le rayonnement solaire incident** sur les cinq faces du bâtiment central.

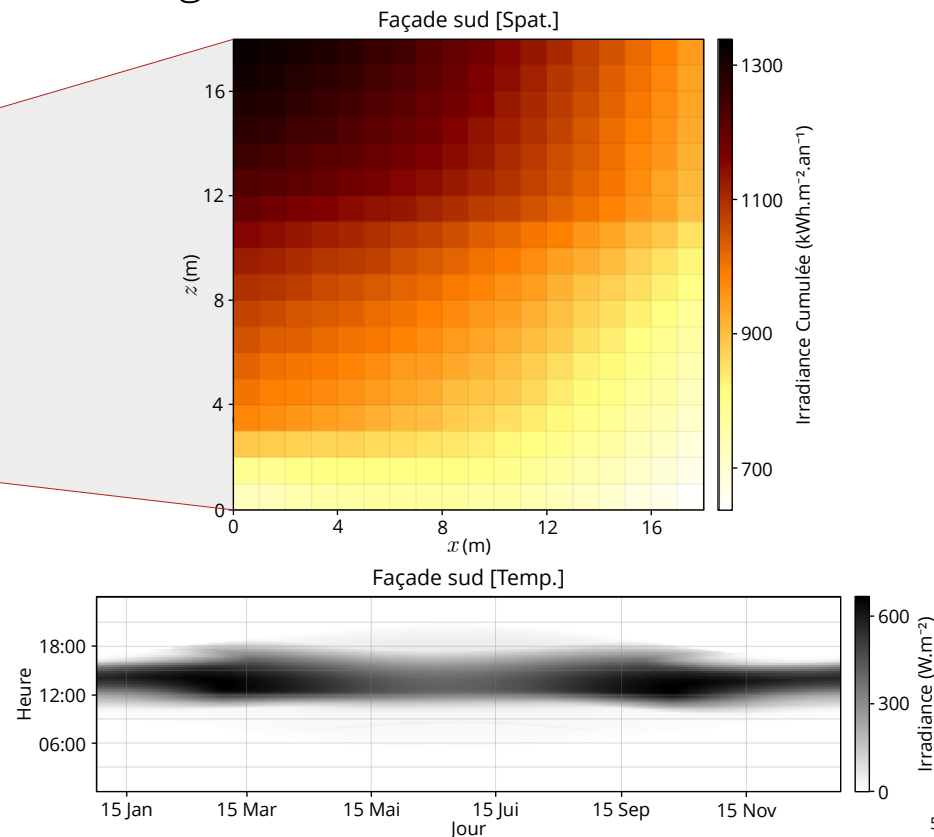


$$\Delta x = 1 \text{ m}$$

Grilles d'évaluation 2-D avec une résolution spatiale de 1 m

$$\Delta t = 15 \text{ min}$$

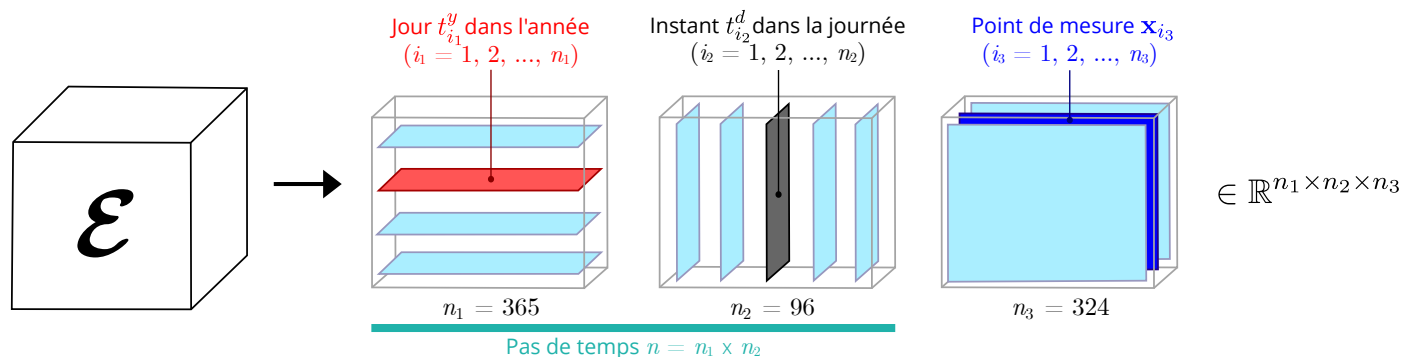
Simulation annuelle avec un pas de temps de 15 minutes



I. Décomposition modale du champ d'irradiance

I.2. Tensor Principal Component Analysis (Tensor PCA)

Sur la base de sa **périodicité temporelle intrinsèque** *a priori* connue, le **champ radiatif spatio-temporel** $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$ modélisé sur chaque façade du bâtiment central est réarrangé sous la forme d'un **tenseur d'ordre 3** :



Décomposition de Tucker du champ d'irradiance \mathcal{E}

Décomposition en Valeurs Singulières Hyper-dimensionnelle

$$\mathcal{E} = \mathcal{S} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \mathbf{U}^{(3)} = \sum_{i_1=1}^{r_1} \sum_{i_2=1}^{r_2} \sum_{i_3=1}^{r_3} \sigma_{i_1 i_2 i_3} \left(\mathbf{u}_{i_1}^{(1)} \odot \mathbf{u}_{i_2}^{(2)} \odot \mathbf{u}_{i_3}^{(3)} \right)$$

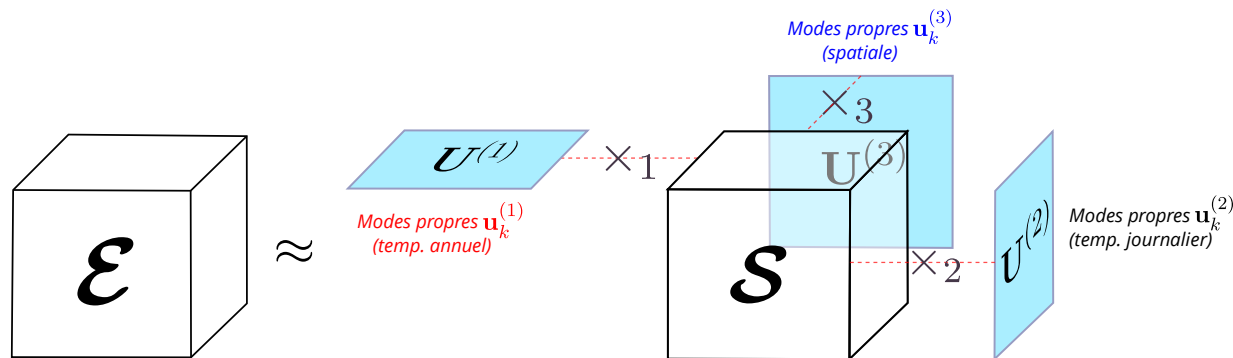
Principales directions de variations annuelles, journalières, surfaciques

Fraction du signal original expliquée par le triplet $(\mathbf{u}_{i_1}^{(1)}, \mathbf{u}_{i_2}^{(2)}, \mathbf{u}_{i_3}^{(3)})$

I. Décomposition modale du champ d'irradiance

I.2. Tensor Principal Component Analysis (Tensor PCA)

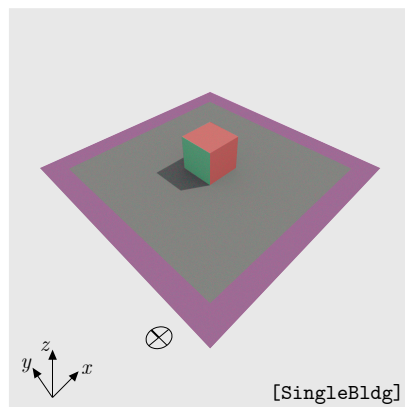
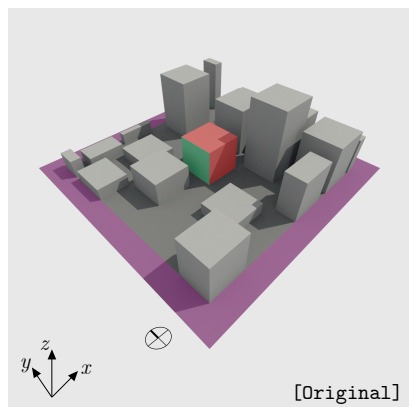
On obtient une **nouvelle représentation du champ d'irradiance** \mathcal{E} présentant une **séparation de ses variables d'espace et de temps** (annuel et journalier)



Les **modes propres** $\mathbf{u}_k^{(i)}$ sont rangés selon les colonnes de $\mathbf{U}^{(i)}$ par **ordre croissant de quantité de variance dans la direction i** , i.e. d'information sur la dynamique globale du phénomène original dans cette dimension, donnée par les éléments de \mathcal{S}

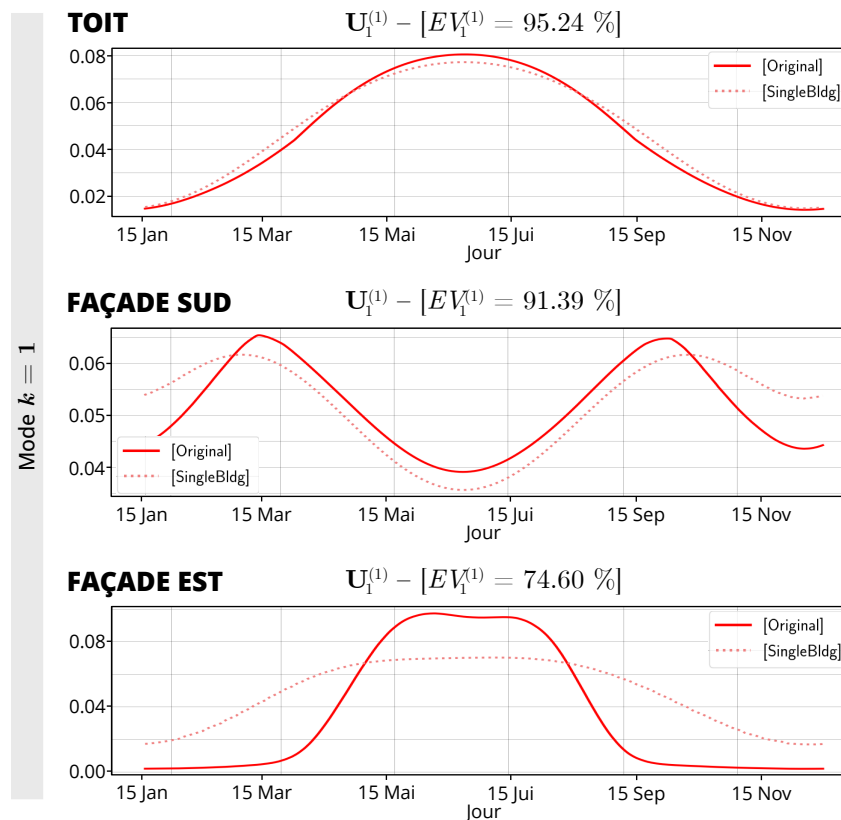
II. Analyse des modes dominants de variation

II.1. Temporel annuel - $U^{(1)}$



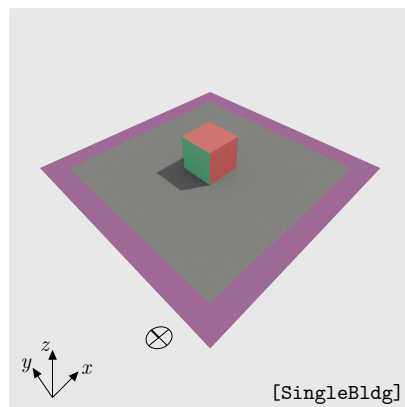
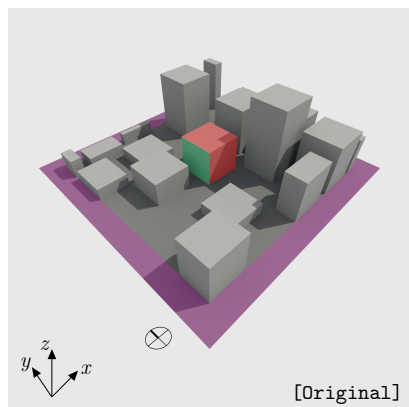
- Des **bandes de fréquences caractéristiques** sont décrites par les **mode k successifs**

- $k = 1$: Distribution annuelle moyenne



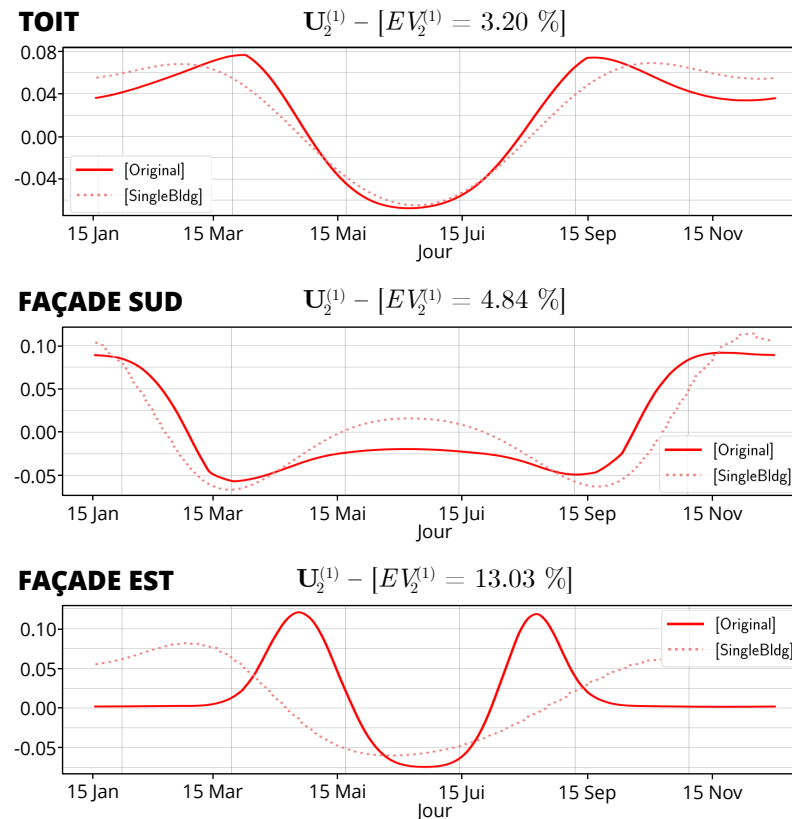
II. Analyse des modes dominants de variation

II.1. Temporel annuel - $U^{(1)}$



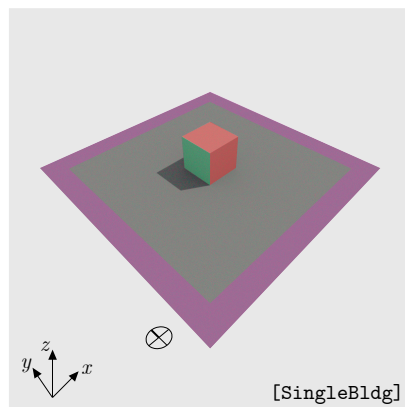
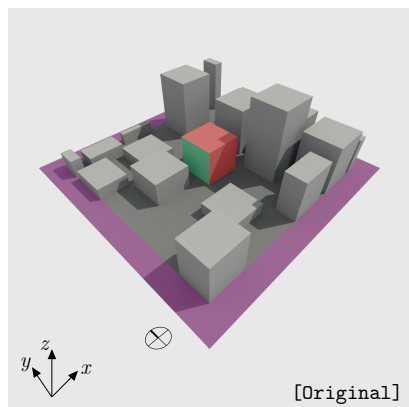
- Des **bandes de fréquences caractéristiques** sont décrites par les **mode k successifs**

- $k = 1$: Distribution annuelle moyenne
- $k = 2$: Cycles saisonniers



II. Analyse des modes dominants de variation

II.1. Temporel annuel - $\mathbf{U}^{(1)}$

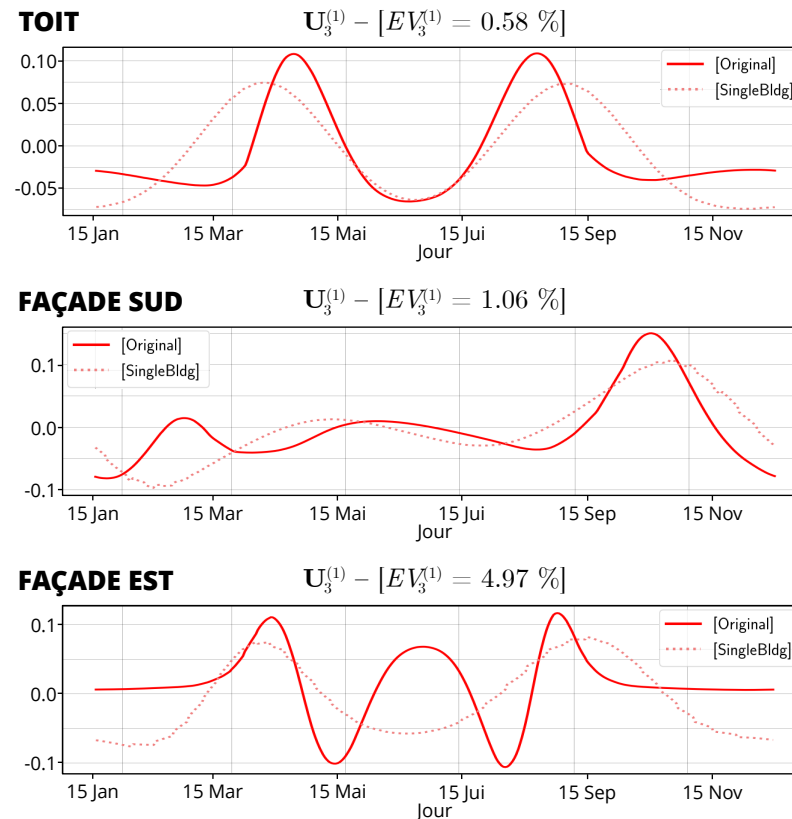


■ Des **bandes de fréquences caractéristiques** sont décrites par les **mode k successifs**

- $k = 1$: Distribution annuelle moyenne
- $k = 2$: Cycles saisonniers
- $k = 3$: Variations intra-saisonnières

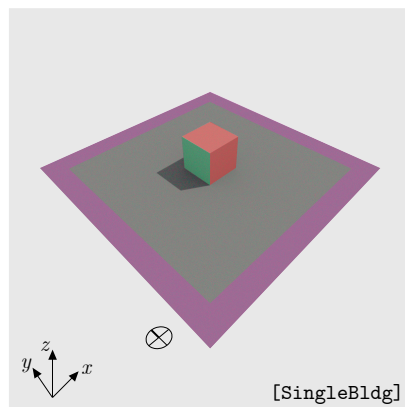
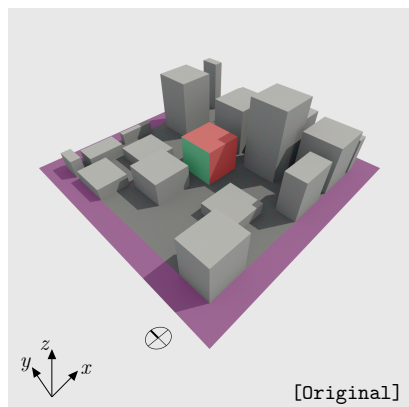
*Augmentation de la fréquence
décrite avec une décroissance
de la variance expliquée $EV_k^{(i)}$*

Mode $k = 3$



II. Analyse des modes dominants de variation

II.2. Temporel journalier - $U^{(2)}$

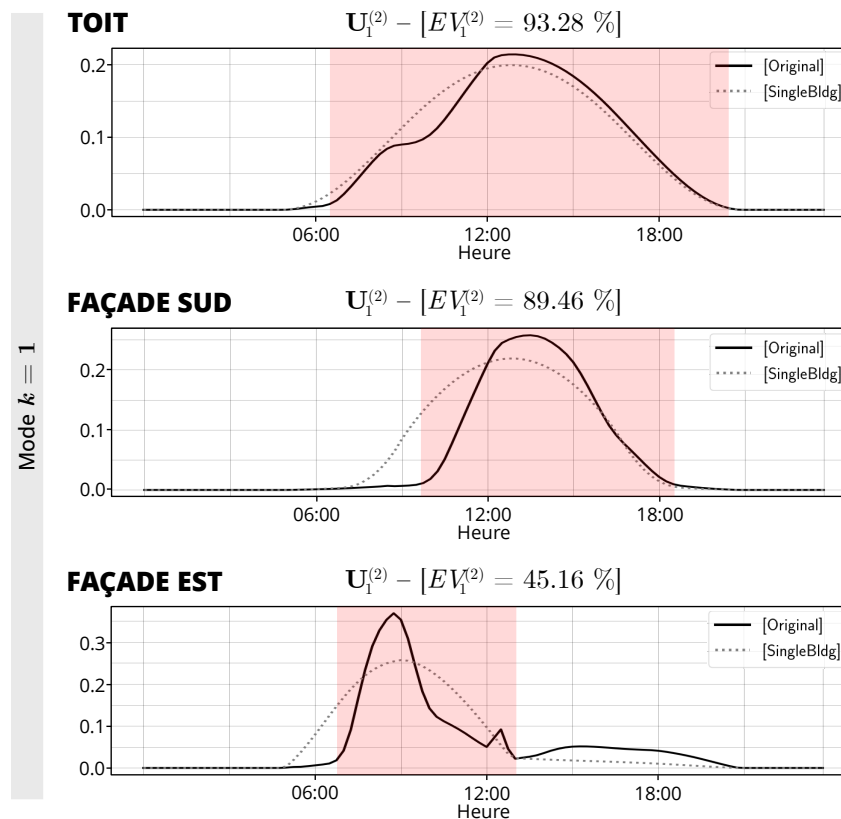


- Des **bandes de fréquences caractéristiques** sont décrites par les **mode k successifs**

- $k = 1$: Distribution journalière moyenne, cycles diurnes

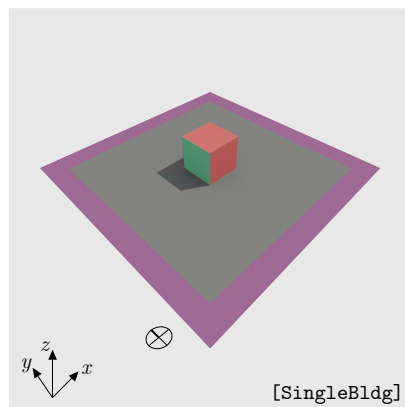
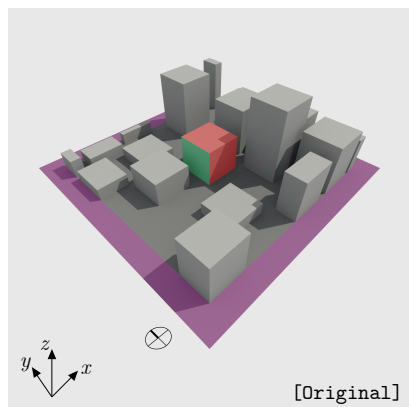
- Mise en évidence des **spécificités morphologiques et géographiques** du quartier

- Orientation des surfaces



II. Analyse des modes dominants de variation

II.2. Temporel journalier - $U^{(2)}$

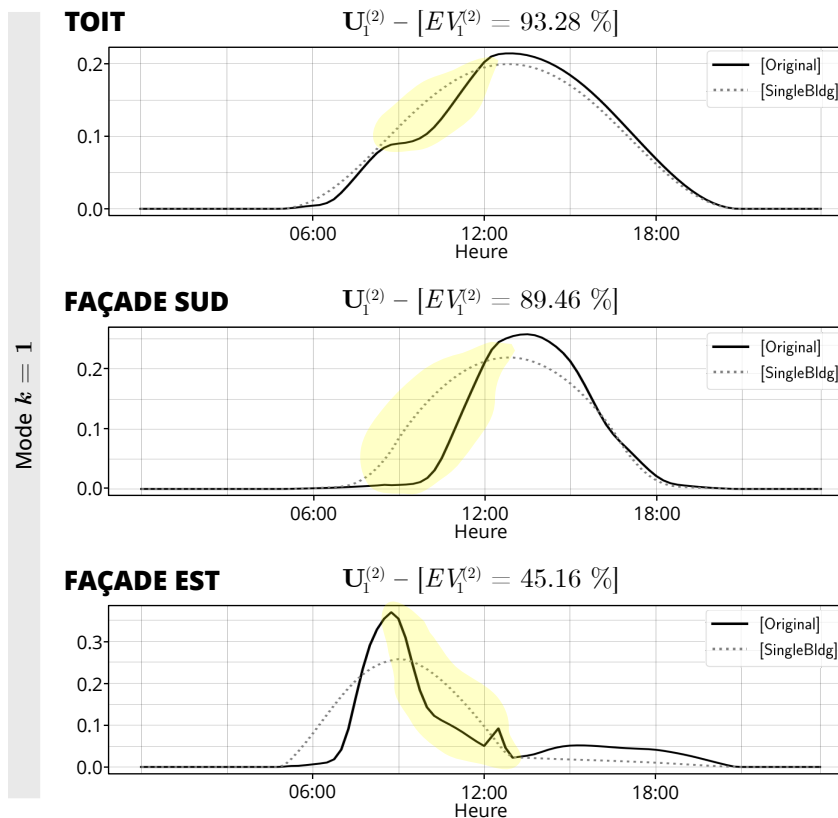


- Des **bandes de fréquences caractéristiques** sont décrites par les **mode k successifs**

- $k = 1$: Distribution journalière moyenne, cycles diurnes

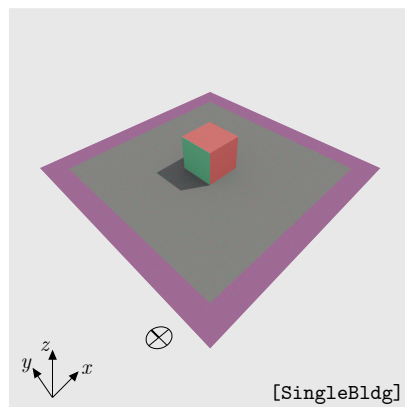
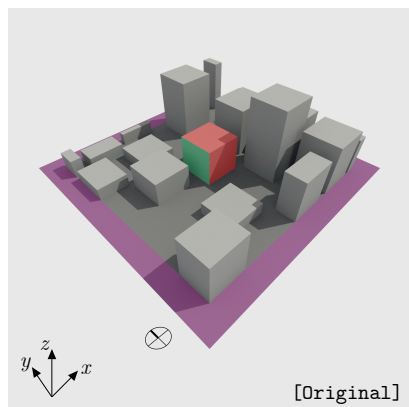
- Mise en évidence des **spécificités morphologiques et géographiques** du quartier

- Orientation des surfaces
 - Ombrages causés par les infrastructures environnantes



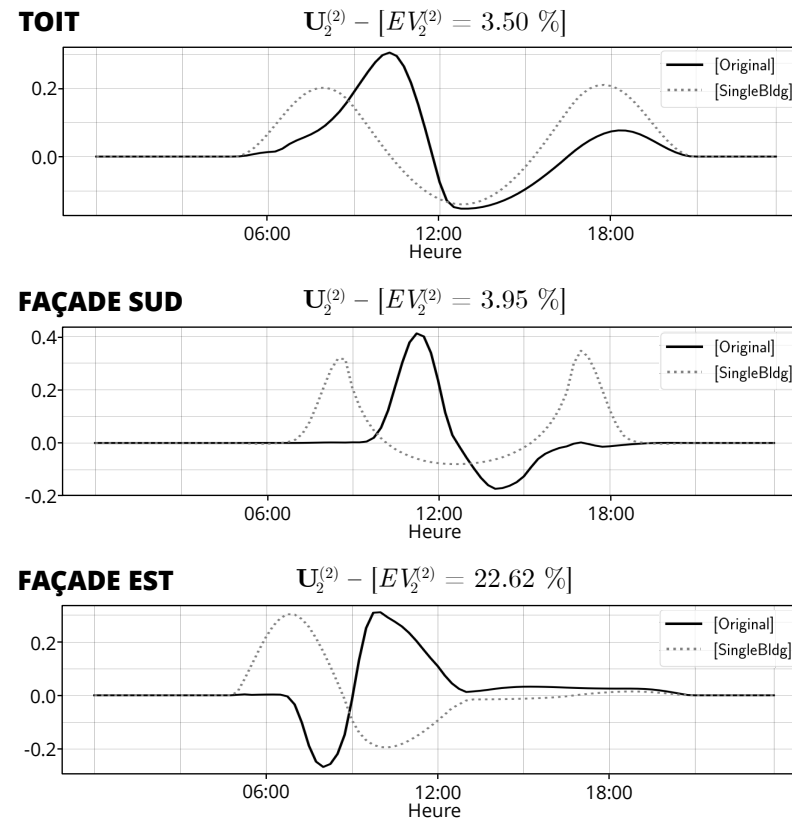
II. Analyse des modes dominants de variation

II.2. Temporel journalier - $\mathbf{U}^{(2)}$



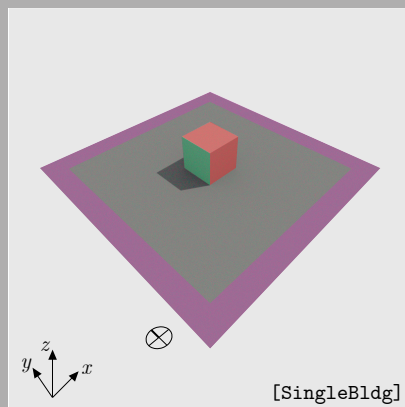
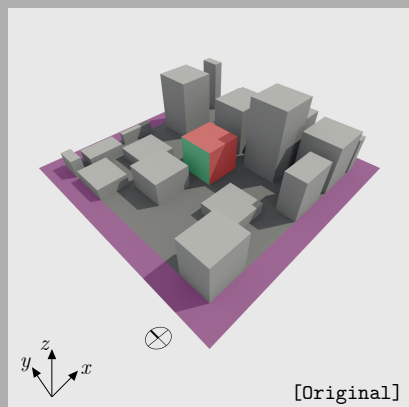
■ Des **bandes de fréquences caractéristiques** sont décrites par les **mode k successifs**

- $k = 1$: Distribution journalière moyenne, cycles diurnes
- $k = 2$: Variations intra-journalières, distinctions matin/après-midi

 Mode $k = 2$


II. Analyse des modes dominants de variation

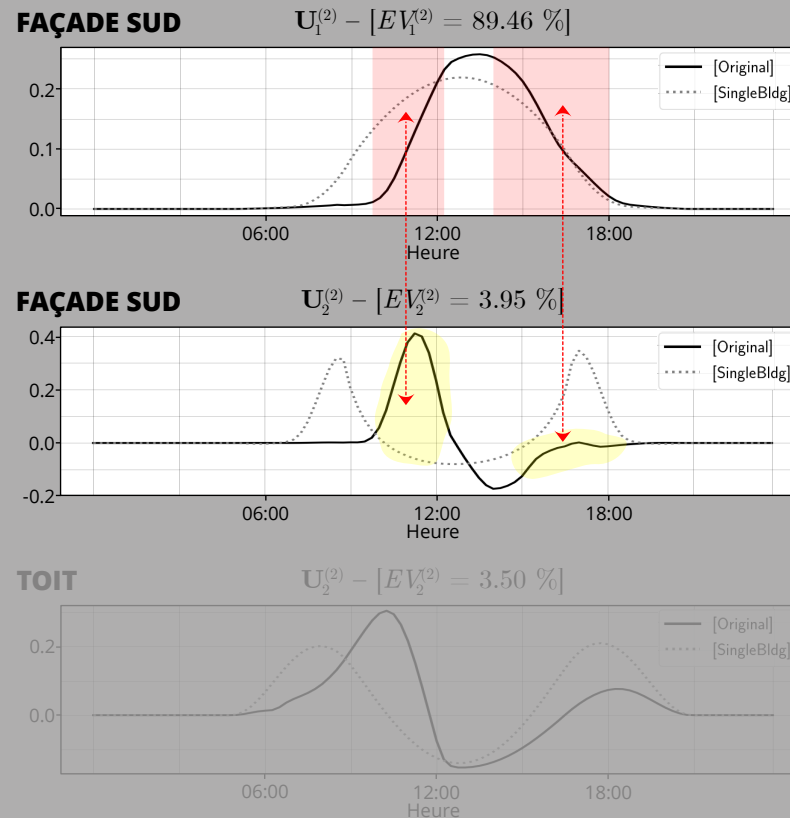
II.2. Temporel journalier - $\mathbf{U}^{(2)}$



- Des **bandes de fréquences caractéristiques** sont décrites par les **mode k successifs**

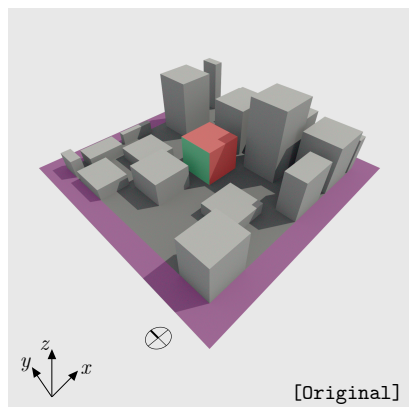
- $k = 1$: Distribution journalière moyenne, cycles diurnes
- $k = 2$: Variations intra-journalières, distinctions matin/après-midi

- Les modes d'ordre $k > 1$ apportent une **modulation à une échelle plus fine** des modes au rang $k - 1$ directement supérieurs



II. Analyse des modes dominants de variation

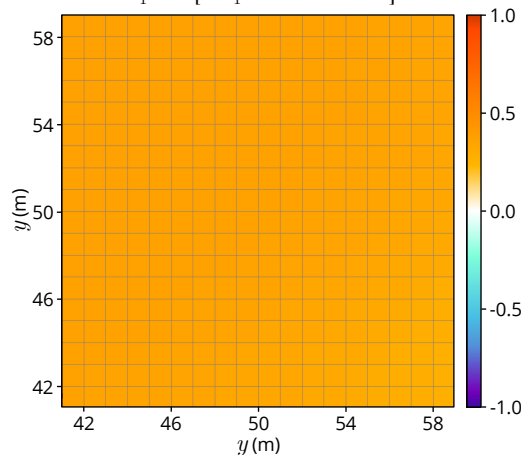
II.3. Spatial - $\mathbf{U}^{(3)}$



Mode $k = 1$

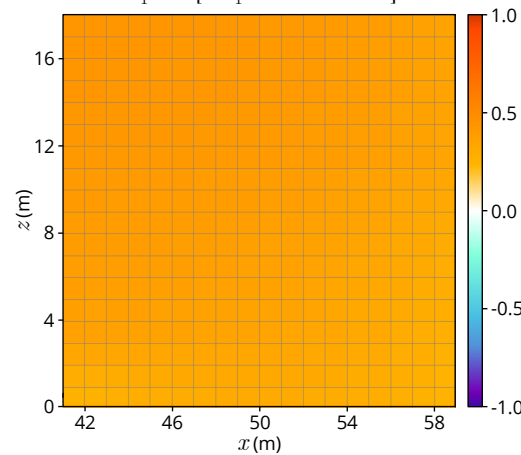
TOIT

$$\mathbf{U}_1^{(3)} - [EV_1^{(3)} = 95.93 \text{ \%}]$$



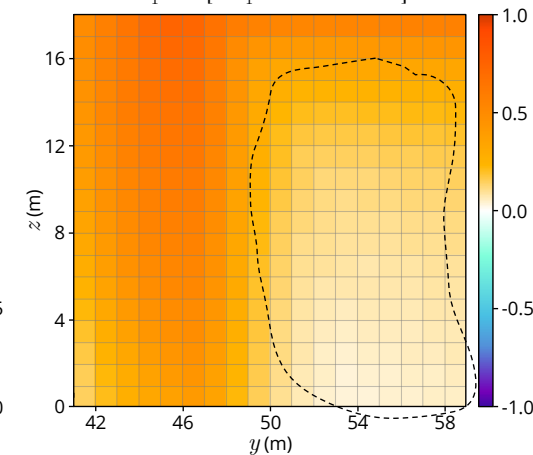
FAÇADE SUD

$$\mathbf{U}_1^{(3)} - [EV_1^{(3)} = 89.63 \text{ \%}]$$



FAÇADE EST

$$\mathbf{U}_1^{(3)} - [EV_1^{(3)} = 46.04 \text{ \%}]$$



- Des **bandes de fréquences caractéristiques** sont décrites par les **mode k successifs**

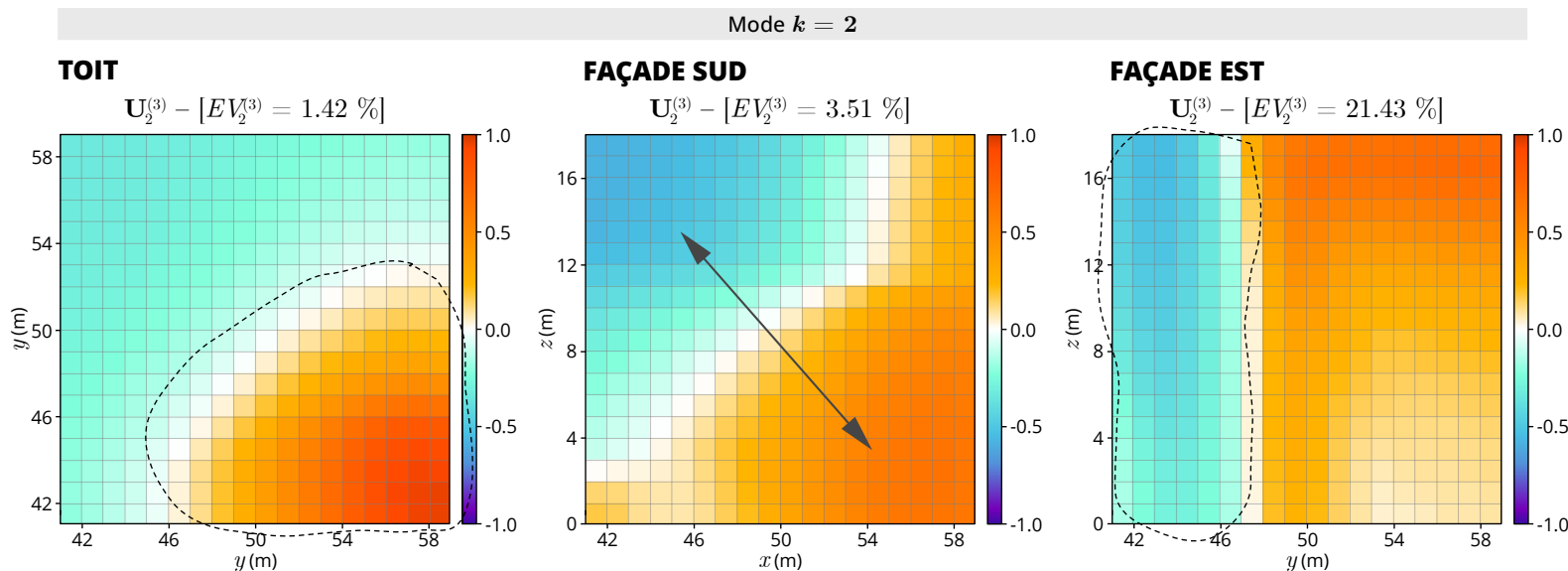
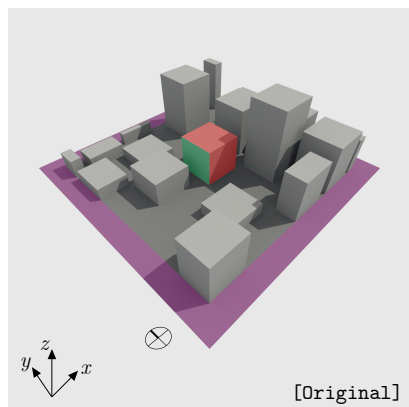
■ $k = 1$: Distribution surfacique moyenne sur l'année

- Mise en évidence des **spécificités morphologiques** du quartier

■ Ombrages causés par les infrastructures environnantes

II. Analyse des modes dominants de variation

II.3. Spatial - $\mathbf{U}^{(3)}$



- Des **bandes de fréquences caractéristiques** sont décrites par les **mode k successifs**

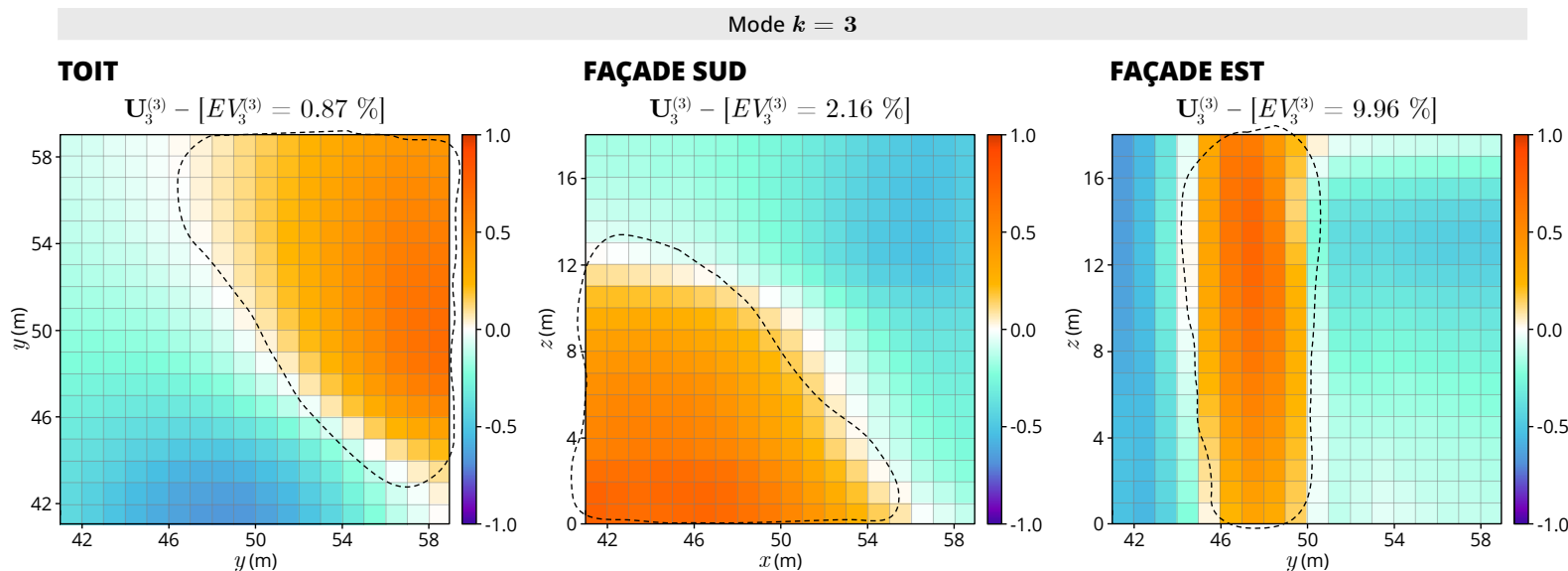
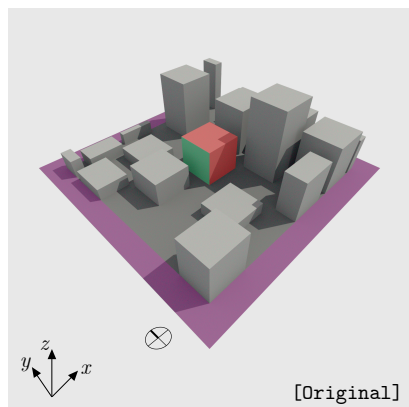
- $k = 1$: Distribution surfacique moyenne sur l'année
- $k = 2$: Variabilité causée par les éléments structurels les plus influents

- Mise en évidence des **spécificités morphologiques** du quartier

- Ombrages causés par les infrastructures environnantes

II. Analyse des modes dominants de variation

II.3. Spatial - $\mathbf{U}^{(3)}$



- Des **bandes de fréquences caractéristiques** sont décrites par les **mode k successifs**

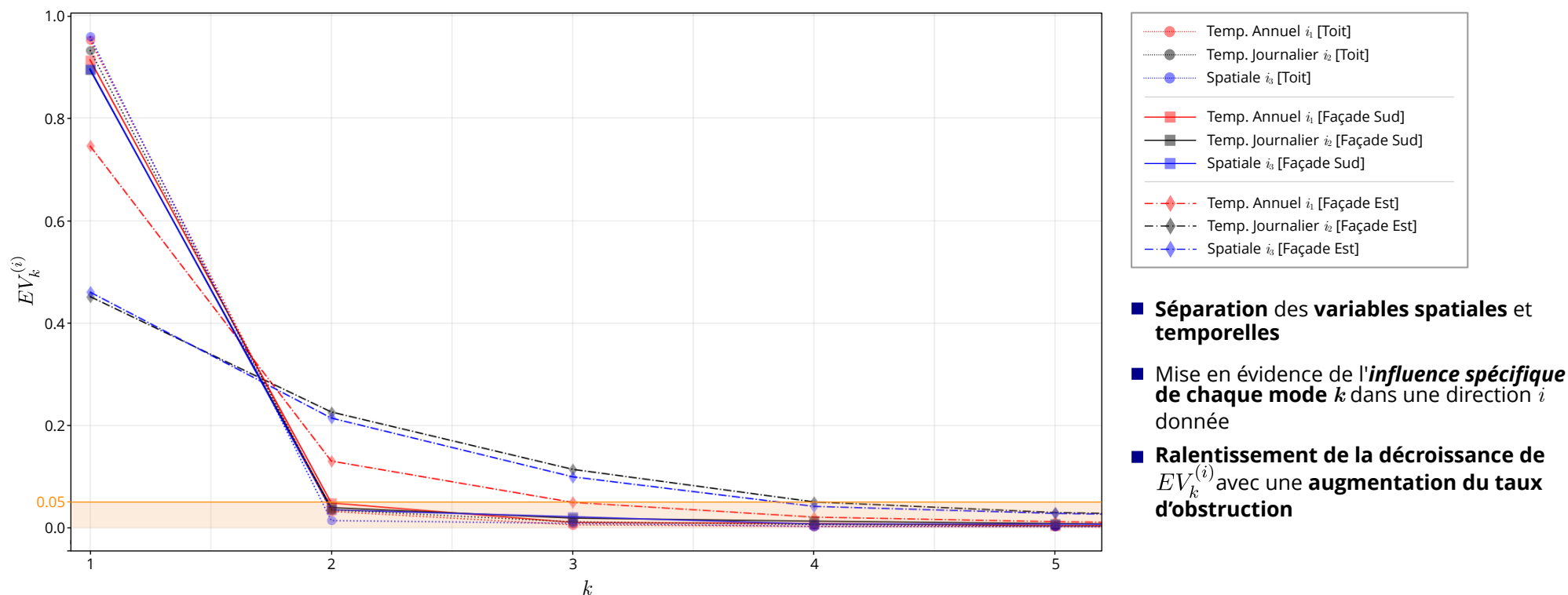
- $k = 1$: Distribution surfacique moyenne sur l'année
- $k = 2$: Variabilité causée par les éléments structurels les plus influents
- $k = 3$: Variations plus rapides dues aux éléments structurels moins influents

- Mise en évidence des **spécificités morphologiques** du quartier

- Ombrages causés par les infrastructures environnantes

II. Analyse des modes dominants de variation

II.4. Évolution des valeurs propres avec k



Conclusion et perspectives

CONCLUSIONS

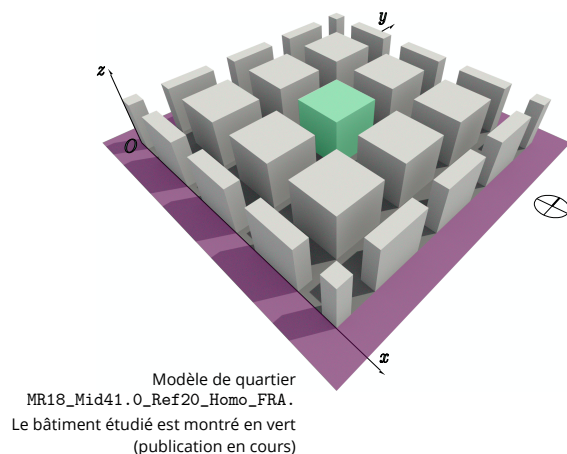
La **décomposition modale multi-dimensionnelle**, via notamment une approche par *Analyse en Composantes Principales Tensorielle (Tensor PCA)*, se positionne ainsi comme une méthode pour l'aide à l'**analyse de la variabilité de la ressource solaire en milieu urbain complexe** :

- Caractérisations **indépendantes** des **variabilités spatiales** et **temporelles** de la ressource solaire urbaine
- Identification des **principales variables/sources de variations**

Conclusion et perspectives

TRAVAUX EN COURS ET FUTURES TÂCHES

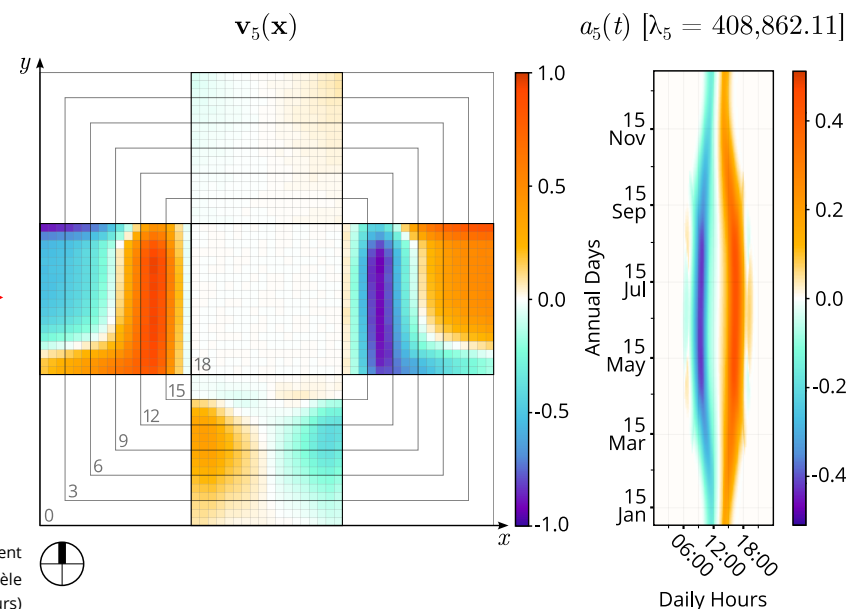
- Validation de l'approche pour des **modèles urbains plus complexes** (e.g. vitrage fortement spéculaire, végétation semi-transparente, couverture nuageuse stochastique) : extension pour des **tenseurs d'ordre $n > 3$**
- Modification du **domaine spatial de décomposition** (e.g. échelle du bâtiment ou du quartier, regroupement des façades par orientation)
- Evaluation de la pertinence de **différents algorithmes de décomposition modale** (e.g. Spectral POD, Cyclo-Stationary EOF Analysis)



PCA [Enveloppe totale]

Cinquième mode spatiale $\mathbf{v}_5(\mathbf{x})$ (gauche) et coefficient temporel principal associé $a_5(t)$ (droite) pour le modèle MR18_Mid41.0_Ref20_Homo_FRA (publication en cours)

$$k = 5 - EV_5 = 1.51 \%$$



Merci
pour votre attention

Références

Le Gall, G., et al., (2023). Principal Component Analysis for the characterisation of spatiotemporal variations of the solar resource in urban environments. *Proceedings of the 17th International Conference on Heat Transfers IHTC-17, 14-18 August 2023, Cape Town, South Africa*. Begell House Inc.

A1. Décomposition modale du champ d'irradiance

A1.1. Tensor Principal Component Analysis (Tensor PCA)

Le **champ radiatif spatio-temporel** $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$ modélisé sur chaque façade du bâtiment central se résume à un **jeu de données discret d'irradiances** obtenues aux p points de la grille d'évaluation pour les n pas de temps annuels :

$$\begin{array}{c} \text{Irradiance reçue au point de} \\ \text{coordonnées } \mathbf{x}_1 \text{ au temps } t_1 \end{array} \leftarrow \mathcal{E} = \begin{array}{c} \text{Points de mesure } (\sim 10^2 \cdot 10^3) \\ \hline \begin{bmatrix} E(\mathbf{x}_1, t_1) & E(\mathbf{x}_2, t_1) & \cdots & E(\mathbf{x}_p, t_1) \\ E(\mathbf{x}_1, t_2) & E(\mathbf{x}_2, t_2) & \cdots & E(\mathbf{x}_p, t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\mathbf{x}_1, t_n) & E(\mathbf{x}_2, t_n) & \cdots & E(\mathbf{x}_p, t_n) \end{bmatrix}_{n,p} \end{array} \begin{array}{c} \text{Pas de temps} \\ (\sim 10^4) \end{array} \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

Matrice **longiligne**
($n \gg p$)

A1. Décomposition modale du champ d'irradiance

A1.1. Tensor Principal Component Analysis (Tensor PCA)

Le **champ radiatif spatio-temporel** $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$ modélisé sur chaque façade du bâtiment central se résume à un **jeu de données discret d'irradiances** obtenues aux p points de la grille d'évaluation pour les n pas de temps annuels :

Points de mesure ($\sim 10^2$ - 10^3)

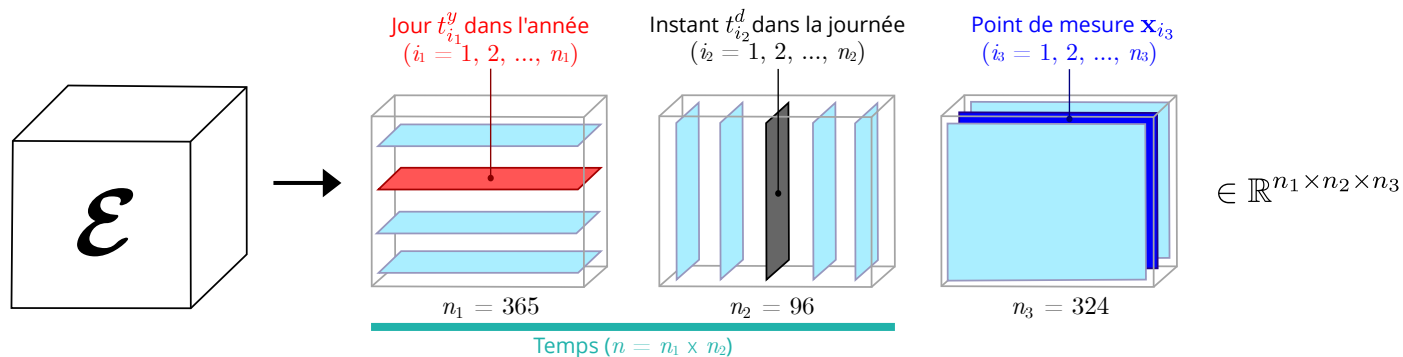
Irradiance reçue au point de coordonnées \mathbf{x}_1 au temps t_1 ←

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} E(\mathbf{x}_1, t_1) & E(\mathbf{x}_2, t_1) & \cdots & E(\mathbf{x}_p, t_1) \\ E(\mathbf{x}_1, t_2) & E(\mathbf{x}_2, t_2) & \cdots & E(\mathbf{x}_p, t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\mathbf{x}_1, t_n) & E(\mathbf{x}_2, t_n) & \cdots & E(\mathbf{x}_p, t_n) \end{bmatrix}_{n,p}$$

Pas de temps ($\sim 10^4$) $\in \mathbb{R}^{n \times p}$

Matrice **longiligne**
($n \gg p$)

Sur la base de sa **périodicité temporelle intrinsèque** *a priori* connue, le champ $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$ est réarrangé sous la forme d'un **tenseur d'ordre 3** :



A1. Décomposition modale du champ d'irradiance

A1.1. Tensor Principal Component Analysis (Tensor PCA)

■ Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) du dépliement de \mathcal{E} selon ses 3 dimensions

Pour $i = 1, 2, 3$:

Dépliement de \mathcal{E} selon sa dimension i : $\mathcal{E}_{(i)} = \mathbf{E}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times \prod_{j \neq i} n_j}$

Réarrangement en une matrice 2-D \mathbf{E}_i dont les colonnes correspondent aux vecteurs successifs selon la dimension i

Fin

A1. Décomposition modale du champ d'irradiance

A1.1. Tensor Principal Component Analysis (Tensor PCA)

■ Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) du dépliement de \mathcal{E} selon ses 3 dimensions

Pour $i = 1, 2, 3$:

Dépliement de \mathcal{E} selon sa dimension i : $\mathcal{E}_{(i)} = \mathbf{E}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times \prod_{j \neq i} n_j}$

Réarrangement en une matrice 2-D \mathbf{E}_i dont les colonnes correspondent aux vecteurs successifs selon la dimension i

Décomposition en Valeurs Singulières de $\mathcal{E}_{(i)}$:

$$\mathcal{E}_{(i)} = \mathbf{U}^{(i)} \cdot \Sigma^{(i)} \cdot \mathbf{V}^{(i)'} \quad \text{avec : } \mathbf{U}^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i \times r_i} \text{ orthonormale } (\mathbf{U}^{(i)'} \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{I}_{r_i})$$

Rang $r_i \leq n_i$ de \mathbf{E}_i

$$\Sigma^{(i)} = \text{diag}(\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \dots, \sigma_{r_i}^{(i)}) \in \mathbb{R}_+^{*r_i \times r_i}$$

Fin

A1. Décomposition modale du champ d'irradiance

A1.1. Tensor Principal Component Analysis (Tensor PCA)

■ Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) du dépliement de \mathcal{E} selon ses 3 dimensions

Pour $i = 1, 2, 3$:

Dépliement de \mathcal{E} selon sa dimension i : $\mathcal{E}_{(i)} = \mathbf{E}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times \prod_{j \neq i} n_j}$

Réarrangement en une matrice 2-D \mathbf{E}_i dont les colonnes correspondent aux vecteurs successifs selon la dimension i

Décomposition en Valeurs Singulières de $\mathcal{E}_{(i)}$:

$$\mathcal{E}_{(i)} = \mathbf{U}^{(i)} \cdot \Sigma^{(i)} \cdot \mathbf{V}^{(i)'} \quad \text{avec : } \mathbf{U}^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i \times r_i} \text{ orthonormale } (\mathbf{U}^{(i)'} \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{I}_{r_i})$$

Rang $r_i \leq n_i$ de \mathbf{E}_i

$$\Sigma^{(i)} = \text{diag}(\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \dots, \sigma_{r_i}^{(i)}) \in \mathbb{R}_+^{*r_i \times r_i}$$

$\{(\mathbf{u}_k^{(i)}, \sigma_k^{(i)2})\}_{k=1}^{r_i}$ solutions du **problème aux valeurs propres**

$$\mathbf{K}_{\mathbf{E}_i} \cdot \mathbf{u}_k^{(i)} = \sigma_k^{(i)2} \mathbf{u}_k^{(i)} \quad k = 1, 2, \dots, r_i$$

Fin

A1. Décomposition modale du champ d'irradiance

A1.1. Tensor Principal Component Analysis (Tensor PCA)

■ Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) du dépliement de \mathcal{E} selon ses 3 dimensions

Pour $i = 1, 2, 3$:

Dépliement de \mathcal{E} selon sa dimension i : $\mathcal{E}_{(i)} = \mathbf{E}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times \prod_{j \neq i} n_j}$

Réarrangement en une matrice 2-D \mathbf{E}_i dont les colonnes correspondent aux vecteurs successifs selon la dimension i

Décomposition en Valeurs Singulières de $\mathcal{E}_{(i)}$:

$$\mathcal{E}_{(i)} = \mathbf{U}^{(i)} \cdot \Sigma^{(i)} \cdot \mathbf{V}^{(i)'}, \quad \text{avec : } \mathbf{U}^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i \times r_i} \text{ orthonormale } (\mathbf{U}^{(i)'} \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{I}_{r_i})$$

Rang $r_i \leq n_i$ de \mathbf{E}_i

$$\Sigma^{(i)} = \text{diag}(\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \dots, \sigma_{r_i}^{(i)}) \in \mathbb{R}_+^{r_i \times r_i}$$

$\{(\mathbf{u}_k^{(i)}, \sigma_k^{(i)2})\}_{k=1}^{r_i}$ solutions du **problème aux valeurs propres**

Vecteurs propres $\mathbf{u}_k^{(i)}$ donnés
par les colonnes de $\mathbf{U}^{(i)}$

Valeurs propres successives $\sigma_k^{(i)2}$ (variance)
données par le carré de la diagonale de $\Sigma^{(i)}$

Covariance des variabilités $\mathbf{K}_{\mathbf{E}_i} = \mathbf{E}_i \mathbf{E}_i'$
selon la dimension i

$$\mathbf{K}_{\mathbf{E}_i} \cdot \mathbf{u}_k^{(i)} = \sigma_k^{(i)2} \mathbf{u}_k^{(i)}, \quad k = 1, 2, \dots, r_i$$

Fin

A1. Décomposition modale du champ d'irradiance

A1.1. Tensor Principal Component Analysis (Tensor PCA)

■ Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) du dépliement de \mathcal{E} selon ses 3 dimensions

Pour $i = 1, 2, 3$:

Dépliement de \mathcal{E} selon sa dimension i : $\mathcal{E}_{(i)} = \mathbf{E}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times \prod_{j \neq i} n_j}$

Réarrangement en une matrice 2-D \mathbf{E}_i dont les colonnes correspondent aux vecteurs successifs selon la dimension i

Décomposition en Valeurs Singulières de $\mathcal{E}_{(i)}$:

$$\mathcal{E}_{(i)} = \mathbf{U}^{(i)} \cdot \Sigma^{(i)} \cdot \mathbf{V}^{(i)'}, \quad \text{avec : } \mathbf{U}^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i \times r_i} \text{ orthonormale } (\mathbf{U}^{(i)'} \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{I}_{r_i})$$

Rang $r_i \leq n_i$ de \mathbf{E}_i

$$\Sigma^{(i)} = \text{diag}(\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \dots, \sigma_{r_i}^{(i)}) \in \mathbb{R}_+^{r_i \times r_i}$$

$\{(\mathbf{u}_k^{(i)}, \sigma_k^{(i)2})\}_{k=1}^{r_i}$ solutions du **problème aux valeurs propres**

Vecteurs propres $\mathbf{u}_k^{(i)}$ donnés
par les colonnes de $\mathbf{U}^{(i)}$

Valeurs propres successives $\sigma_k^{(i)2}$ (variance)
données par le carré de la diagonale de $\Sigma^{(i)}$

Covariance des variabilités $\mathbf{K}_{\mathbf{E}_i} = \mathbf{E}_i \mathbf{E}_i'$
selon la dimension i

$$\mathbf{K}_{\mathbf{E}_i} \cdot \mathbf{u}_k^{(i)} = \sigma_k^{(i)2} \mathbf{u}_k^{(i)}, \quad k = 1, 2, \dots, r_i$$

Fin

■ Calcul du noyau \mathcal{S}

$$\mathcal{S} = \mathcal{E} \times_1 \mathbf{U}^{(1)'} \times_2 \mathbf{U}^{(2)'} \times_3 \mathbf{U}^{(3)'} \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_2 \times r_3}, \quad \text{avec : } [\mathcal{S}_{i_1 i_2 i_3}] = \sigma_{i_1 i_2 i_3} \text{ et } \sigma_k^{(i)} = \|\mathcal{S}_{(i)}(k, :)\|_F$$

Projection successive du champ d'irradiance original selon ses modes propres de variations dans les 3 directions $i = 1, 2$ et 3

A1. Décomposition modale du champ d'irradiance

A1.1. Tensor Principal Component Analysis (Tensor PCA)

■ Décomposition de Tucker du champ d'irradiance \mathcal{E}

$$\mathcal{E} = \mathcal{S} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \mathbf{U}^{(3)} = \sum_{i_1=1}^{r_1} \sum_{i_2=1}^{r_2} \sum_{i_3=1}^{r_3} \sigma_{i_1 i_2 i_3} \left(\mathbf{u}_{i_1}^{(1)} \odot \mathbf{u}_{i_2}^{(2)} \odot \mathbf{u}_{i_3}^{(3)} \right)$$

Principales directions de variations annuelles, journalières, surfaciques

Fraction du signal original expliquée par le triplet $(\mathbf{u}_{i_1}^{(1)}, \mathbf{u}_{i_2}^{(2)}, \mathbf{u}_{i_3}^{(3)})$

A1. Décomposition modale du champ d'irradiance

A1.1. Tensor Principal Component Analysis (Tensor PCA)

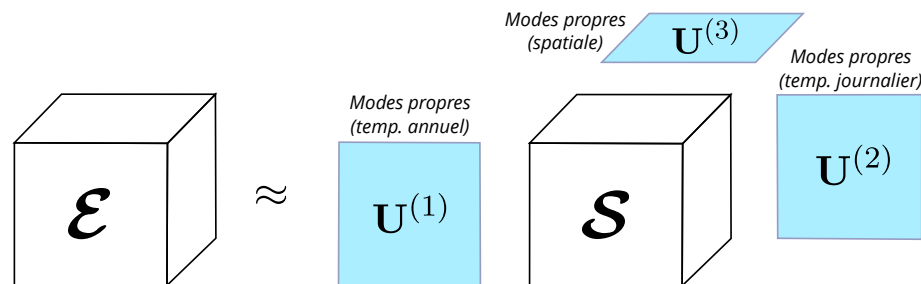
■ Décomposition de Tucker du champ d'irradiance \mathcal{E}

$$\mathcal{E} = \mathcal{S} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \mathbf{U}^{(3)} = \sum_{i_1=1}^{r_1} \sum_{i_2=1}^{r_2} \sum_{i_3=1}^{r_3} \sigma_{i_1 i_2 i_3} \left(\mathbf{u}_{i_1}^{(1)} \odot \mathbf{u}_{i_2}^{(2)} \odot \mathbf{u}_{i_3}^{(3)} \right)$$

Principales directions de variations annuelles, journalières, surfaciques

Fraction du signal original expliquée par le triplet $(\mathbf{u}_{i_1}^{(1)}, \mathbf{u}_{i_2}^{(2)}, \mathbf{u}_{i_3}^{(3)})$

On obtient une **nouvelle représentation du champ d'irradiance \mathcal{E}** présentant une **séparation claire** de ses **variables d'espace et de temps** (annuel et journalier)



A1. Décomposition modale du champ d'irradiance

A1.1. Tensor Principal Component Analysis (Tensor PCA)

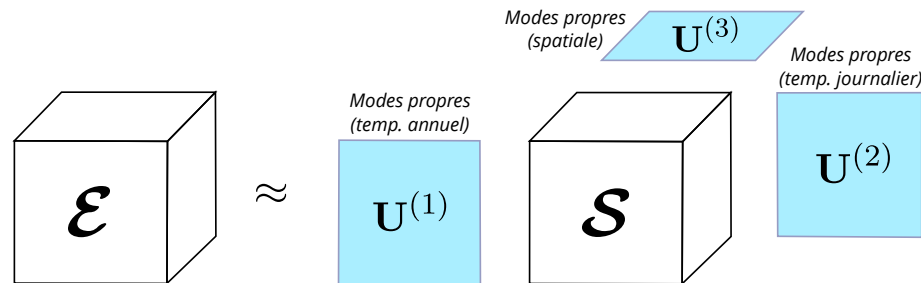
■ Décomposition de Tucker du champ d'irradiance \mathcal{E}

$$\mathcal{E} = \mathcal{S} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \mathbf{U}^{(3)} = \sum_{i_1=1}^{r_1} \sum_{i_2=1}^{r_2} \sum_{i_3=1}^{r_3} \sigma_{i_1 i_2 i_3} \left(\mathbf{u}_{i_1}^{(1)} \odot \mathbf{u}_{i_2}^{(2)} \odot \mathbf{u}_{i_3}^{(3)} \right)$$

Principales directions de variations annuelles, journalières, surfaciques

Fraction du signal original expliquée par le triplet $(\mathbf{u}_{i_1}^{(1)}, \mathbf{u}_{i_2}^{(2)}, \mathbf{u}_{i_3}^{(3)})$

On obtient une **nouvelle représentation du champ d'irradiance \mathcal{E}** présentant une **séparation claire** de ses **variables d'espace et de temps** (annuel et journalier)



■ Contribution du mode k au signal initial \mathcal{E} dans la direction i

Quantité de **variance expliquée** par $\mathbf{u}_k^{(i)}$: $EV_k^{(i)} = \frac{\sigma_k^{(i)2}}{\|\mathcal{E}\|_F^2}$, $k = 1, 2, \dots, r_i$ et $i = 1, 2$ et 3

A2. Analyse des modes dominants de variation

A2.1. Évolution des valeurs propres avec k

